ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические рекомендации для экспертов территориальных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ выпускников IX классов общеобразовательных учреждений

Государственная (итоговая) аттестация выпускников IX классов общеобразовательных учреждений (в новой форме)

2009 год

АЛГЕБРА

Москва
2009 год

Научный руководитель: к.п.н., Ковалева Г.С., заместитель директора ФИПИ

Авторы-составители: Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, Л.О. Рослова

Повышение объективности результатов государственной (итоговой) аттестации выпускников 9 классов общеобразовательных учреждений (в новой форме) во многом определяется качеством экспертной проверки территориальными предметными комиссиями выполнения заданий с развернутым ответом. Рекомендации по формированию и организации работы предметных комиссий (подкомиссий) территориальной экзаменационной комиссии субъекта Российской Федерации, создаваемых для организации оценивания экзаменационных работ в рамках государственной (итоговой) аттестации обучающихся, освоивших образовательные программы основного общего образования (Приложение 3 к письму Рособрнадзора от 29.02.2008 № 01-96/08-01) содержат положение о том, что «Территориальные предметные комиссии в своей работе руководствуются… рекомендациями и инструкциями уполномоченной организации, осуществляющей по поручению Рособрнадзора разработку экзаменационных заданий по проверке и оцениванию экзаменационных работ обучающихся, освоивших образовательные программы основного общего образования». На практике это означает необходимость ознакомления экспертов территориальных предметных комиссий с общими подходами к проверке и оценке экзаменационных работ, а также определенной тренировки для обучения их приемам работы с системой оценивания экзаменационной работы по предмету. Это позволит обеспечить «соблюдение процедуры проверки экзаменационных работ обучающихся» и повысить надежность результатов.

С этой целью специалистами Федерального института педагогических измерений подготовлены методические пособия для организации подготовки экспертов территориальных предметных комиссий, подкомиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом в 2009 г. Пособие по предмету включает в себя описание экзаменационной работы 2009 года, научно-методические подходы к проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов учащихся с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Авторы будут благодарны за предложения по совершенствованию пособия.

Содержание

1. Характеристика экзаменационной работы 2009 года для государственной (итоговой) аттестации выпускников 9 классов общеобразовательных учреждений (в новой форме).Назначение заданий с развернутым ответом и их особенности

Содержание экзаменационных заданий по алгебре находится в рамках содержания образования, обозначенного «Федеральным компонентом государственного стандарта общего образования. Математика. Основное общее образование; 2004».

В 2009 г. изменений по сравнению с 2008 г. в общих подходах к составлению экзаменационной работы нет. Работа состоит из двух частей. *Часть 1* направлена на проверку овладения содержанием курса на уровне базовой подготовки. Она содержит 16 заданий, в совокупности охватывающих следующие разделы курса: *числа*, *буквенные выражения*, *преобразования алгебраических выражений*, *уравнения*, *неравенства*, *последовательности и прогрессии*, *функции и графики*. Эта часть работы содержит 10 заданий с выбором ответа, 5 заданий с кратким ответоми задание на соотнесение. Задания расположены группами в соответствии с разделами содержания, к которым они относятся.

В первой части работы проверяется владение базовыми алгоритмами, знание и понимание важных элементов содержания (понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение применить знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применение знаний в простейших практических ситуациях. При выполнении заданий первой части учащиеся должны продемонстрировать умение пользоваться различными математическими языками, определенную системность знаний и широту представлений.

Часть 2 направлена на проверку владения материалом на повышенных уровнях. Основное ее назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки. В этой части работы содержится 5 заданий разного уровня сложности, требующих развернутого ответа (с записью решения). Все пять заданий представляют разные разделы содержания. Каждое из них относится к одному из следующих семи разделов: *выражения и их преобразования*; *уравнения*; *неравенства*; *функции*; *координаты и графики*; *арифметическая и геометрическая прогрессии*; *текстовые задачи*.

Все задания этой части носят комплексный характер. Они позволяют проверить владение формально-оперативным алгебраическим аппаратом, способность к интеграции знаний из различных тем школьного курса, владение достаточно широким набором приемов и способов рассуждений, а также умение математически грамотно записать решение.

Задания во второй части расположены по нарастанию сложности – от относительно простой задачи до задач достаточно сложных, требующих свободного владения материалом курса и высокого уровня математического развития. Фактически при этом во второй части работы представлены три разных уровня. Первое задание (задание 17 в экзаменационной работе), самое простое. Как правило, оно направлено на проверку владения формально-оперативными навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, системы, построение графика. По уровню сложности это задание лишь немногим превышает обязательный уровень.

Следующие два задания (задания 18 и 19 экзаменационной работы) более высокого уровня, они сложнее первого и в техническом, и в логическом отношении. При хорошем выполнении первой части правильное решение этих заданий уже обеспечивает получение «пятерки».

И, наконец, последние два задания (задания 20 и 21) – наиболее сложные, они требуют свободного владения материалом и довольно высокого уровня математического развития. Рассчитаны эти задачи на выпускников, изучавших математику более основательно, чем в рамках пятичасового курса – это, например, углубленный курс математики, элективные курсы в ходе предпрофильной подготовки, математические кружки и пр. Хотя эти задания не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, при их выполнении выпускник имеет возможность продемонстрировать владение довольно широким набором некоторых специальных приемов (выполнения преобразований, решения уравнений, систем уравнений), проявить некоторые элементарные умения исследовательского характера.

2. Общие подходы к оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом

2.1. Модель 1

2.1.1. Общие подходы к формированию критериев оценивания.

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение ученика удовлетворяет этим требованиям, то ему выставляется полный балл, которым оценивается это задание: № 17 – 2 балла, №18 и 19 – 4 балла, № 20 и 21 – 6 баллов. Если в решении допущена описка или ошибка, не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся засчитывается балл, на 1 меньший указанного.

Ниже описаны некоторые общие позиции, являющиеся основанием для выставления сниженного на единицу балла.

<u>Задание 17 (2 балла)</u>. За решение выставляется ***1 балл***, если оно не содержит ошибок, но при этом не является полным, например, отсутствует ответ на дополнительный вопрос (при его наличии); или: в решении имеется одна описка/ошибка, не влияющая принципиально на ход решения, с ее учетом все дальнейшие шаги выполнены верно, решение доведено до конца.

<u>Задания 18 и 19 (4 балла)</u>. За решение выставляется ***3 балла***, если в нем нет ошибок, но при этом оно не является полным, например, отсутствует ответ на дополнительный вопрос (при его наличии); или: ход решения верный, получен ответ, но имеется описка или непринципиальная ошибка (например, ошибка в вычислении), и с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно, решение доведено до конца.

Задания 20 и 21 (6 баллов). За решение выставляется ***5 баллов***, если решение «почти верное», т.е. ход решения правильный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна непринципиальная вычислительная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; или имеются погрешности в применении символики и терминологии.

В критериях оценивания по каждому конкретному заданию второй части экзаменационной работы, приводимых ниже, эти общие позиции конкретизируются и пополняются с учетом содержания задания. Критерии разработаны применительно к одному из возможных решений, а именно, к тому, которое описано в рекомендациях. При наличии в работах учащихся других решений критерии вырабатываются предметной комиссией с учетом описанных общих подходов. Решения учащихся могут содержать недочеты, не отраженные в критериях, но которые, тем не менее, позволяют оценить результат выполнения задания положительно (со снятием одного балла). В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочет, принимает предметная комиссия.

2.1.2. Критерии проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом (17 – 21)

Задание 17

1. *Разложите на множители*: x^2y+1-x^2-y.

//Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

//Решение. $x^2y+1-x^2-y=x^2(y-1)-(y-1)=(y-1)(x^2-1)=(y-1)(x-1)(x+1)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно и до конца (получено три множителя) выполнено разложение на множители.
1	Ход решения верный, не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца (выражение представлено в виде произведения двух множителей).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибка в знаках при группировке слагаемых считается существенной, при ее наличии решение не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№17 $x^2y+1-x^2-y=x^2y-x^2+1-y=x^2(y-1)-1(y-1)=(x^2-1)(y-1)$

За решение выставляется 1 балл, так как оно не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца.

Пример 2.

17. $x^2y+1-x^2-y= x^2(y-1)+1-y=$ $=(y-1)(x^2+1)$

За решение выставляется 0 баллов; допущена ошибка в знаках при группировке слагаемых (см. комментарий к критериям).

2. *Сократите дробь* $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

//<u>Ответ</u>: $\dfrac{x-1}{x}$.

//<u>Решение</u>. Корни квадратного трехчлена $5x^2-3x-2$: $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{2}{5}$. Имеем:

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)}=\frac{x-1}{x}.$$

<u>Замечание</u>. Учащийся может разложить на множители трехчлен каким-либо иным способом. Например: $5x^2 - 3x - 2 = (3x^2 - 3x) + (2x^2 - 2) = 3x(x - 1) + 2(x^2 - 1) = (x - 1)(3x + 2(x + 1))$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя дроби, получен верный ответ.
1	Допущена описка или ошибка вычислительного характера при нахождении корней квадратного трехчлена, но разложение его на множители с учетом этой ошибки выполнено верно, решение при этом может оказаться не доведенным до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

<u>Комментарий</u>. Учащиеся не обязаны указывать область определения сокращаемой дроби.

<u>Примеры выполнения заданий учащимися</u>

<u>Пример 1.</u>

1) $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\dfrac{\cancel{5}(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{\cancel{5}x\cancel{(x+0,4)}}=\dfrac{x-1}{x}$ $5x^2-3x-2=0;$ $D=9+40=49;$ $x=\dfrac{3\pm7}{10};\quad x_1=1;\ x_2=-0,4;$

За решение выставляется 2 балла. Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.

Пример 2.

7) $\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \frac{5(x-1)(x+0,4)}{5x^2+2x} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} =$

$= \frac{x-1}{x}$

О.Д.З.
$5x+2\neq 0$
$x \neq -\frac{2}{5}$

Сокращение дроби выполнено верно. Но так как при указании ОДЗ допущена ошибка (хотя нахождение области определения дроби в данном случае не требуется), за решение выставляется 1 балл.

Задания 18 и 19

1. *Найдите область определения выражения*: $\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$.

//Ответ: $\left[-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{3};3\right]$.

//Решение. Область определения выражения задается условиями $\begin{cases}21+2x-3x^2\geq 0\\ 3x-7\neq 0\end{cases}$.

Решим неравенство $21+2x-3x^2\geq 0$: $3x^2-2x-21\leq 0$; $x_1=-\frac{7}{3}$, $x_2=3$; $x\in[-\frac{7}{3};3]$;

Из условия $3x-7\neq 0$ имеем $x\neq\frac{7}{3}$.

Отсюда: $x\in\left[-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{3};3\right]$.

Замечание. Ответ может быть представлен в форме: $-\mathbf{\frac{7}{3}}\leq x<\mathbf{\frac{7}{3}}, \mathbf{\frac{7}{3}}<x\leq\mathbf{3}$.

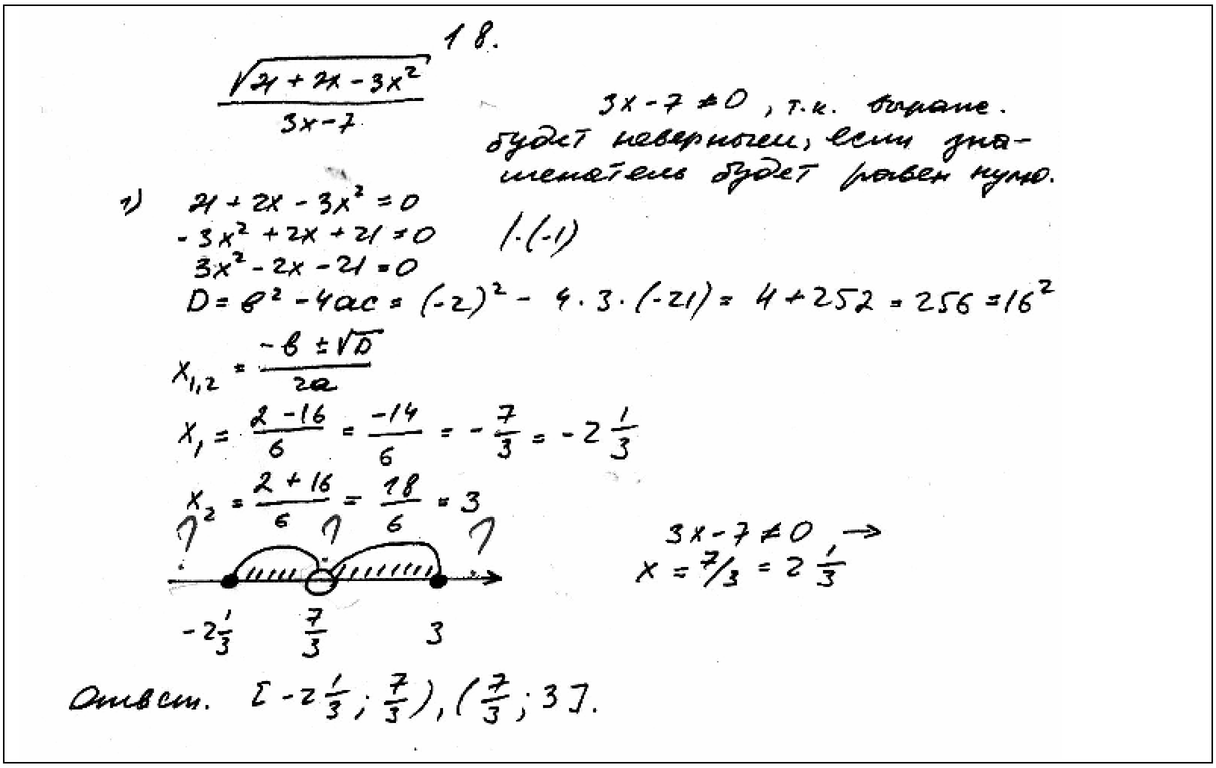
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Учтены оба условия, задающие область определения данного выражения, все выкладки выполнены верно, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущена ошибка в символической записи ответа; или допущена описка или ошибка вычислительного характера (например, при вычислении корней квадратного трехчлена) и с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; или при определении области определения квадратного корня

	рассмотрено строгое неравенство.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки в алгоритме решения квадратного неравенства, в применении формулы корней квадратного уравнения считаются существенными и решение при их наличии не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1



18.

$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$

$3x-7\neq 0$, т.к. дробное будет неверным, если знаменатель будет равен нулю.

1) $21+2x-3x^2=0$

$-3x^2+2x+21=0 \quad |\cdot(-1)$

$3x^2-2x-21=0$

$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-21)=4+252=256=16^2$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{2-16}{6}=\frac{-14}{6}=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{2+16}{6}=\frac{18}{6}=3$

$3x-7\neq 0 \rightarrow$

$x=7/3=2\frac{1}{3}$

$-2\frac{1}{3} \quad \frac{7}{3} \quad 3$

Ответ. $[-2\frac{1}{3};\frac{7}{3}),(\frac{7}{3};3]$.

За решение выставляется 3 балла. Ход рассуждений понятен, он правильный, получен верный ответ. Балл снижен за некорректное пояснение, приведенное в начале решения.

Замечание. Вопросительные знаки поставлены на схеме экспертом; мы в этом рисунке недочетов не видим.

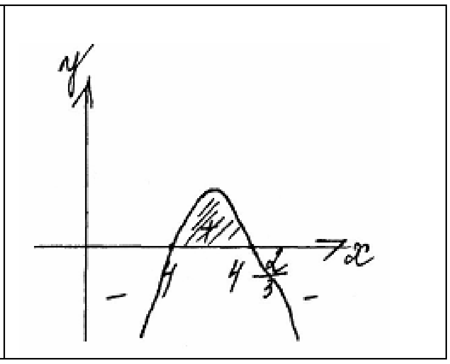
Пример 2.

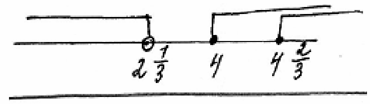
№ 18.

$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$

$21+2x-3x^2 \geq 0$

$-3x^2+2x+21 \geq 0$



Рассмотрим квадратичную ф-ю $f(x) = -3x^2 + 2x + 21$, гр. парабола ветви вниз. нули: $-3x^2 + 2x + 21 = 0$ $D = 4 - 4\cdot(-3)\cdot 21 = 256$ $x_1 = \frac{-2+26}{-6} = 4$ $x_2 = \frac{-2-26}{-6} =$ $= -\frac{28}{-6} = 4\frac{4}{6} = 4\frac{2}{3}$	$[4;\ 4\frac{2}{3}]$. $3x - 7 \ne 0$ $3x \ne 7$ $x \ne 2\frac{1}{3}$  Ответ: $[4;\ 4\frac{2}{3}]$; $(-\infty;\ 2\frac{1}{3})$

За решение выставляется 0 баллов; в нем содержится более одной ошибки, поэтому оно соответствует графе «Другие случаи, не соответствующие указанным критериям». Учащимся, во-первых, допущена вычислительная ошибка при нахождении корней квадратного трехчлена; во-вторых, решив квадратное неравенство (с учетом найденных корней) и правильно наложив ограничение на знаменатель дроби, он не сумел объединить полученные результаты в правильный вывод.

2. *Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена* $a_n = 5n + 1$. *Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по пятьдесят пятый включительно*.
//Ответ: 7216.

//Решение.
Обозначим искомую сумму через S, тогда $S = S_{55} - S_{14}$.
Найдем S_{55} и S_{14}. Имеем: $a_1 = 6$, $a_{14} = 5\cdot 14 + 1 = 71$, $a_{55} = 5\cdot 55 + 1 = 276$;
$S_{55} = \frac{(6+276)\cdot 55}{2} = 7755$, $S_{14} = \frac{(6+71)\cdot 14}{2} = 539$.
Таким образом, $S = 7755 - 539 = 7216$.
Другое возможное решение. Найдем сумму членов арифметической прогрессии, первый член которой равен a_{15}, а последний равен a_{55}. Имеем:
$a_{15} = 76$, $a_{55} = 276$, $n = 55 - 14 = 41$; $S = \frac{(76+276)\cdot 41}{2} = 7216$.
Замечание. При любом способе решения возможно использование другой формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Для этого учащиеся должны установить, что разность прогрессии равна 5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Правильно найден способ решения и получен верный ответ.
3	При правильном ходе решения и верном использовании формул допущена вычислительная ошибка, но с ее учетом дальнейшие шаги

	выполнены верно.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. К числу существенных ошибок, при наличии которых выставляется 0 баллов, относятся ошибки в применении формул, в определении количества суммируемых членов прогрессии.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

19)

$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n\ ;\quad a_1=15\cdot5+1=76$$

$$a_n=55\cdot5+1=276$$

$$S=\frac{76+276}{2}\cdot 41=\frac{\cancel{2}(38+138)}{\cancel{2}}\cdot 41$$

$$(38+138)\cdot 41=7216$$

Ответ: 7216.

За решение можно выставить 4 балла: оно верное, ход рассуждений понятен. По-видимому, для этого учащегося задача является элементарной, и он опускает пояснение деталей, которые ему кажутся очевидными.

Пример 2.

А.п.

$$a_n=5n+1$$

$$S_{15:55}=?$$

$$a_{15}=5\cdot15+1=76.$$

$$a_{55}=5\cdot55+1=276.$$

$$S=\frac{(a_{15}+a_{55})\cdot 40}{2}=\frac{(76+276)\cdot\cancel{40}\,20}{\cancel{2}}=352\cdot20=7040.$$

Ответ: 7040.

За решение выставляется 0 баллов. Неправильно определено число суммируемых членов.

Задания 20 и 21

1. *Решите систему уравнений*: $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)((2y-1) = 0 \end{cases}$.

//Ответ: $(-5; -2)$, $(-5; 1)$, $(-2{,}5; 0{,}5)$. Другие возможные формы записи ответа:

$x_1 = -5,\ y_1 = -2$; $x_2 = -5,\ y_2 = 1$; $x_3 = -2{,}5,\ y_3 = 0{,}5$;

или $\begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_3 = -2{,}5 \\ y_3 = 0{,}5 \end{cases}$.

//Решение. На основании условия равенства произведения нулю получим:

$\begin{cases} x + 5 = 0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$.

Решим первую систему. Из первого уравнения имеем $x = -5$; подставив это значение x во второе уравнение, получим уравнение $2y^2 + 2y - 4 = 0$. Его корни: $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Получаем два решения системы уравнений $(-5; -2)$ и $(-5; 1)$.

Решив вторую систему, получим: $y = 0{,}5$; $x = -2{,}5$. Получаем еще одно решение системы уравнений: $(-2{,}5; 0{,}5)$.

Таким образом, система имеет три решения: $(-5; -2), (-5; 1), (-2{,}5; 0{,}5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Правильно выполнен переход от данной системы к равносильной ей дизъюнкции (совокупности) двух систем, все дальнейшие шаги выполнены верно, получен верный ответ.
5	Ход решения правильный, решение доведено до конца, найденные значения переменных правильно объединены в пары, но: или допущена одна непринципиальная вычислительная ошибка (например, при нахождении корней квадратного уравнения) или описка, с ее учетом все дальнейшие шаги выполнены верно; или допущены погрешности логического характера в употреблении символики (если она применяется).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки при объединении найденных значений переменных в пары считаются существенными; в этом случае решение не засчитывается. Если имеется более двух вычислительных ошибок или решение не доведено до конца, то оно не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№20. $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)(2y-1) = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x+5=0 \\ 2y-1=0 \end{cases}\right.$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=\frac{1}{2}=0{,}5 \end{cases}$ 1) $x=-5$ $2y^2-5+2y=-1$ $2y^2+2y-4=0$ $D=4-4\cdot 2\cdot(-4)=4+32=36$ $\sqrt{D}=6$ $y_{1,2}=\frac{-2\pm 6}{4}$ $\quad y_1=2 \quad y_2=-1$ $(-5; 2)$; $(-5; -1)$.	2) $y=0{,}5$ $2\cdot 0{,}25+x+2\cdot 0{,}5=-1$ $0{,}5+x+1=-1$ $1{,}5+1=-x$ $x=-2{,}5$ $(-2{,}5; 0{,}5)$ Ответ: $(-5; 2)$; $(-5; -1)$; $(-2{,}5; 0{,}5)$.

За решение выставляется 5 баллов; допущены ошибки в употреблении символики.

Пример 2.

№20.

$$\begin{cases} 2y^2+x+2y=-1 \\ (x+5)\cdot(2y-1)=0 \end{cases}$$

$x=-1-2y-2y^2$

$(5-1-2y-2y^2)(2y-1)=0$

$(4-2y^2-2y)(2y-1)=0$

$4-2y^2-2y=0$ $\qquad$ $2y-1=0$

$-2y^2-2y+4=0 \,|:-2$ $\qquad$ $2y=1$

$y^2+y-2=0$ $\qquad$ $y_3=\frac{1}{2}$

$y_n=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ $\qquad$ $x_3=-1-1-\frac{1}{2}=-2-\frac{1}{2}=-2\frac{1}{2}$

$y_n=\frac{-1\pm3}{2}$

$y_1=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$

$y_2=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

$x_1=-1-2-2=-5$

$x_2=-1+4-8=-5$

Проверка:

$(-5;1)$ $\qquad$ $(-5;-2)$ $\qquad$ $(-2,5;0,5)$ – не подходит

$2-5+2=-1$ $\qquad$ $8-5-4=-1$ $\qquad$ $3,5-2,5+3\neq-1$

$(-5+5)(2-1)=0$ $\qquad$ $(-5+5)(-4-1)=0$ $\qquad$ $(-2,5+5)(3-1)\neq0$

Ответ: $(-5;1);(-5;-2)$.

За решение можно выставить 5 баллов: ход решения правильный, и, по сути, верный ответ получен. Но решение содержит логическую ошибку: выполнив проверку (которая в данном случае не является составной частью решения и может служить только цели самоконтроля), учащийся допустил вычислительную ошибку и сделал неправильный вывод о наличии постороннего решения, которого в принципе в данной ситуации быть не может.

Замечание. За нерациональное решение баллы не снимаются. Хотя хотелось бы, чтобы для сильного учащегося наличие уравнения $(x+5)(2y=1)=0$ сразу же служило сигналом к попытке применить условие равенства нулю произведения. Приведенное решение показывает (и это не единичный случай), что не наработаны некоторые стандартные приемы, обязательные для подготовки сильного ученика.

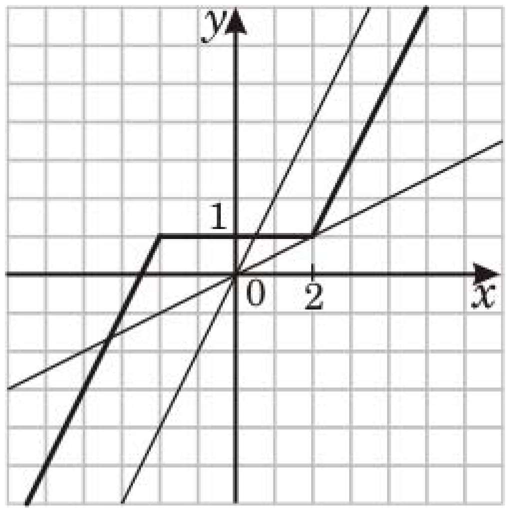
2. *Найдите все значения k, при которых прямая y = kx пересекает в трех точках ломаную, заданную условиями*:

$$y = \begin{cases} 2x+5, \text{ если } x < -2 \\ 1, \text{ если } -2 \le x \le 2 \\ 2x-3, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

//<u>Ответ</u>: $\frac{1}{2} < k < 2$. Другие возможные формы ответа: $k \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ или $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

//<u>Решение</u>.

Построим ломаную и проведем «граничные» прямые. Уравнение одной из них $y = \frac{1}{2}x$, другой $y = 2x$. Из рисунка видно, что в трех точках пересекают ломаную все прямые, проходящие через начало координат, находящиеся «между» этими двумя прямыми. Отсюда $\frac{1}{2} < k < 2$.



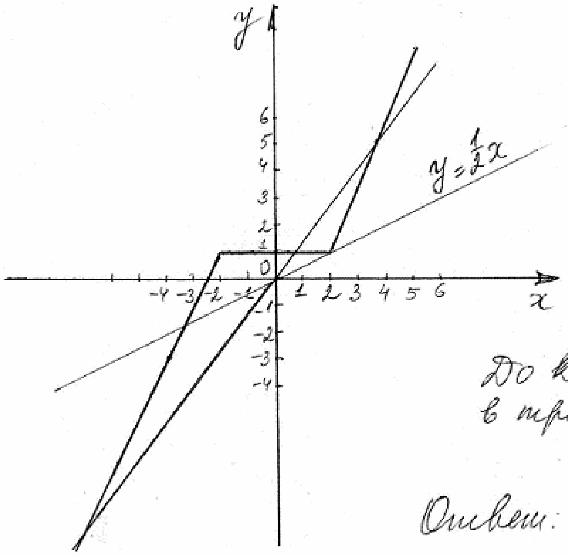
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Правильно построена ломаная, верно найдено множество значений коэффициента *k*.
5	Правильно построена ломаная, решение доведено до конца, но вместо строгого неравенства при записи множества значений *k* записано нестрогое неравенство.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Если график построен неправильно, или график построен правильно, но дальнейшие шаги отсутствуют, то решение не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

21. $y = \begin{cases} 2x+5, \text{ если } x < -2 \\ 1, \text{ если } -2 \le x \le 2 \\ 2x-3, \text{ если } x > 1. \end{cases}$



$y = kx$

$(2; 1)$

$2 = k \cdot 1$

$k = \frac{1}{2}$

До $k=2$ пересекает в трех точках

Ответ: $\frac{1}{2} < k < 2$

За решение выставляется 6 баллов.

Пример 2.

$y = kx$

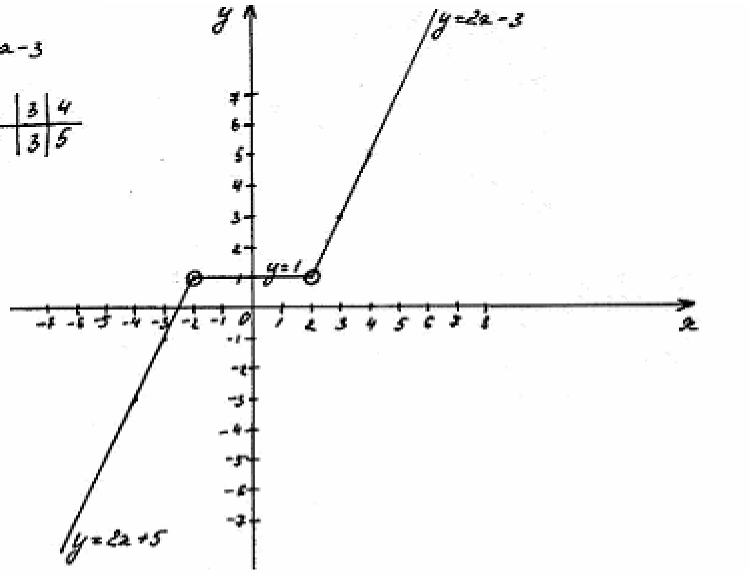
$$y = \begin{cases} 2x+5, \text{ если } x < -2 \\ 1, \text{ если } -2 \le x \le 2 \\ 2x-3, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

$y = 2x + 5$

x	-2	-3	-4
y	1	-1	-3

$y = 2x - 3$

x	2	3	4
y	1	3	5



Чтобы прямая $y=kx$ пересекала этот график функции в трёх различных точках она должна быть возрастающей и k должно быть больше 0,5.

Ответ: $k > 0,5$.

За решение выставляется 0 баллов, оно соответствует графе «Другие случаи, не соответствующие указанным критериям».

3. *Найдите все значения* a, *при которых неравенство* $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \le 0$ *не имеет решений.*

//Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1; 3)$.

//Решение.

График функции $y = x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ должен быть отрицателен.

Имеем: $D_1 = (a+2)^2 - (8a+1) = a^2 - 4a + 3 < 0$.

Решив квадратное неравенство, получаем $1 < a < 3$.

Замечание. Учащийся может воспользоваться формулой дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Другое возможное решение. Найдем ординату вершины параболы y_0 и выясним, при каких значениях a выполняется неравенство $y_0 > 0$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
6	Найден правильный способ решения, все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.
5	Найден правильный способ решения, все шаги выполнены верно, но допущена одна ошибка технического характера (вычислительная или в преобразованиях), при этом решение доведено до конца (ответ может отличаться от правильного).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки при составлении дискриминанта квадратного трехчлена или в применении алгоритма решения квадратного неравенства являются существенными, и при их наличии за решение выставляется 0 баллов.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

$x^2+(2a+4)x+8a+1 \le 0$. найти все значения a при которых решений нет.

т.е. при каких a график параболы не будет пересекать $y=0$.

$D<0$; $D=(2a+4)^2-4(8a+1)=$

$=4a^2+16a+16-32a-4=$

$=4a^2-16a+12<0$.

$a^2-4a+3<0$.

$(a-1)(a-3)<0$.

~~$a \in (-3;1)$~~ $a \in (1;3)$

Ответ: при $a \in (1;3)$

Все шаги решения выполнены верно (хотя есть погрешность в терминологии), получен правильный ответ. За решение можно выставить 6 баллов.

Пример 2.

$x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$

$D = (2a+4)^2 - 4(8a+1)\cdot 1 =$

$= 4a^2 + 16a + 16 - 32a - 4 = 4a^2 - 16a + 12$

$4a^2 - 16a + 12 \leq 0$

$D = 256 - \underbrace{4\cdot 4\cdot 12}_{192} = 64 = 8^2$

$a_{1,2} = \frac{16 \pm 8}{16}$

$a_1 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

$a_2 = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$

Ответ: при $a = \frac{3}{4}$ и $a = \frac{3}{2}$ н.р.с не имеет реш-й

За решение выставляется 0 баллов. Учащийся не владеет приемом решения квадратного неравенства, допускает ошибки в применении формулы корней квадратного уравнения.

2.2. Модель 2

2.2.2. Критерии оценивания выполнения заданий с развернутым ответом (задания 17-21)

2.2.1. Общие подходы к формированию критериев оценивания

Требования к выполнению заданий с развернутым ответом заключаются в следующем: решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным. Не следует требовать от учащихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Если решение ученика удовлетворяет этим требованиям, то ему выставляется полный балл, которым оценивается это задание: № 17 – 2 балла, №18 и 19 – 3 балла, № 20 и 21 – 4 балла. В зависимости от полноты и правильности решения учащемуся может быть засчитан не только указанный балл, но и «частичный», вплоть до 1. При этом принципиальным условием является следующее: ***задание оценивается любым положительным баллом только в том случае, когда из записей учащегося можно сделать вывод о том, что он знает ход решения***.

Ниже описаны некоторые общие позиции, являющиеся основанием для выставления неполного балла за решения, содержащие те или иные недочеты.

<u>Задание 17 (2 балла)</u>. За решение выставляется ***1 балл***, если в нем нет ошибок, но при этом оно не является полным: например, отсутствует ответ на дополнительный вопрос (при его наличии); или: в решении имеется одна описка/ошибка, не влияющая принципиально на ход решения, с ее учетом все дальнейшие шаги выполнены верно, решение доведено до конца.

<u>Задания 18 и 19 (3 балла)</u>. За решение выставляется ***2 балла***, если в нем нет ошибок, но при этом оно не является полным, например, отсутствует ответ на дополнительный вопрос (при его наличии); или: ход решения верный, получен ответ, но имеется описка или непринципиальная ошибка (например, ошибка в вычислении), и с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно, решение доведено до конца.

За решение выставляется ***1 балл***, если ход решения верный, но имеются какие-либо два из указанных выше недостатка или при верном ходе решения оно не доведено до конца.

<u>Задания 20 и 21 (4 балла)</u>. За решение выставляется ***3 балла***, если решение «почти верное», т.е. ход решения правильный, оно доведено до конца, но при этом имеется одна непринципиальная вычислительная ошибка/описка, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; или имеются погрешности в применении символики и терминологии.

За решение выставляется ***2 балла***, если выполнена правильно существенная часть решения, но оно не доведено до конца; или: ход решения правильный, оно доведено до конца, но имеются две непринципиальные погрешности, например, вычислительная ошибка и описка.

За решение выставляется ***1 балл***, если идея решения присутствует, выполнена существенная его часть, но оно не доведено до конца и в приведенных выкладках содержится ошибка технического характера или описка.

В критериях оценивания по каждому конкретному заданию второй части экзаменационной работы, приводимых ниже, эти общие позиции конкретизируются и пополняются с учетом содержания задания. Критерии разработаны применительно к одному из возможных решений, а именно, к тому, которое описано в рекомендациях. При наличии в работах учащихся других решений критерии вырабатываются предметной комиссией с учетом описанных общих подходов. Решения учащихся могут содержать недочеты, не отраженные в критериях, но которые, тем не менее, позволяют оценить результат выполнения задания положительно (с начислением «частичного» балла). В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочет, принимает предметная комиссия.

2.2.2. Критерии проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом (17 – 21)

Задание 17

1. *Разложите на множители*: x^2y+1-x^2-y.

//Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

//Решение. $x^2y+1-x^2-y=x^2(y-1)-(y-1)=(y-1)(x^2-1)=(y-1)(x-1)(x+1)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно и до конца (получено три множителя) выполнено разложение на множители.
1	Ход решения верный, не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца (выражение представлено в виде произведения двух множителей).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибка в знаках при группировке слагаемых считается существенной, при ее наличии решение не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№17 $x^2y+1-x^2-y = x^2y-x^2+1-y = x^2(y-1)-1(y-1) = (x^2-1)(y-1)$

За решение выставляется 1 балл, так как оно не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца.

Пример 2.

17. $x^2y+1-x^2y= x^2(y-1)+1-y =$
$=(y-1)(x^2+1)$

За решение выставляется 0 баллов; допущена ошибка в знаках при группировке слагаемых (см. комментарий к критериям).

2. *Сократите дробь* $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

//<u>Ответ</u>: $\dfrac{x-1}{x}$.

//<u>Решение</u>. Корни квадратного трехчлена $5x^2-3x-2$: $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{2}{5}$. Имеем:

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)}=\frac{x-1}{x}.$$

<u>Замечание</u>. Учащийся может разложить на множители трехчлен каким-либо иным способом. Например: $5x^2 - 3x - 2 = (3x^2 - 3x) + (2x^2 - 2) = 3x(x - 1) + 2(x^2 - 1) = (x - 1)(3x + 2(x + 1))$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Правильно выполнено разложение на множители числителя и знаменателя дроби, получен верный ответ.
1	Допущена описка или ошибка вычислительного характера при нахождении корней квадратного трехчлена, но разложение его на множители с учетом этой ошибки выполнено верно, решение при этом может оказаться не доведенным до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям

<u>Комментарий</u>. Учащиеся не обязаны указывать область определения сокращаемой дроби.

<u>Примеры выполнения заданий учащимися</u>

<u>Пример 1.</u>

17) $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \dfrac{5(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{5x\cancel{(x+0,4)}} = \dfrac{x-1}{x}$

$5x^2-3x-2=0$;
$D=9+40=49$;
$x=\dfrac{3\pm7}{10}$; $x_1=1$; $x_2=-0,4$;

За решение выставляется 2 балла. Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.

Пример 2.

7) $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\dfrac{5(x-1)(x+0{,}4)}{5x^2+2x}=\dfrac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)}=$

$=\dfrac{x-1}{x}$

О.Д.З.
$5x+2\neq 0$
$x\neq -\dfrac{2}{5}$

Сокращение дроби выполнено верно. Но так как при указании ОДЗ допущена ошибка (хотя нахождение области определения дроби в данном случае не требуется), за решение выставляется 1 балл.

Задания 18 и 19

1. *Найдите область определения выражения*: $\dfrac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$.

//Ответ: $\left[-\dfrac{7}{3};\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};3\right]$.

//Решение. Область определения выражения задается условиями $\begin{cases}21+2x-3x^2\geq 0\\ 3x-7\neq 0\end{cases}$.

Решим неравенство $21+2x-3x^2\geq 0$: $3x^2-2x-21\leq 0$; $x_1=-\dfrac{7}{3}$, $x_2=3$; $x\in[-\dfrac{7}{3};3]$;

Из условия $3x-7\neq 0$ имеем $x\neq\dfrac{7}{3}$.

Отсюда: $x\in\left[-\dfrac{7}{3};\dfrac{7}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};3\right]$.

Замечание. Ответ может быть представлен в форме: $-\mathbf{\dfrac{7}{3}}\leq x<\mathbf{\dfrac{7}{3}}, \mathbf{\dfrac{7}{3}}<x\leq\mathbf{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Учтены оба условия, задающие область определения данного выражения, все выкладки выполнены верно, получен верный ответ.
2	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущена ошибка в символической записи ответа; или допущена описка или ошибка вычислительного характера (например, при вычислении корней квадратного трехчлена) и с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно; или при определении области определения квадратного корня

	рассмотрено строгое неравенство.
1	Найдены промежуток, являющийся областью определения квадратного корня, и нули знаменателя, однако эти два результата не соединены в один (при этом в решении может также присутствовать ошибка/описка непринципиального характера).
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки в алгоритме решения квадратного неравенства, в применении формулы корней квадратного уравнения считаются существенными и решение при их наличии не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1

18.

$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$3x-7\neq 0$, т.к. дроби будет неверной, если знаменатель будет равен нулю.

1) $21+2x-3x^2=0$

$-3x^2+2x+21=0 \quad |\cdot(-1)$

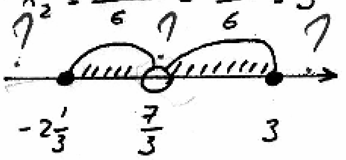
$3x^2-2x-21=0$

$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-21)=4+252=256=16^2$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{2-16}{6}=\frac{-14}{6}=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{2+16}{6}=\frac{18}{6}=3$



$3x-7\neq 0 \rightarrow$

$x=7/3=2\frac{1}{3}$

Ответ. $[-2\frac{1}{3};\frac{7}{3}),(\frac{7}{3};3]$.

За решение выставляется 2 балла. Ход рассуждений понятен, он правильный, получен верный ответ. Балл снижен за некорректное пояснение, приведенное в начале решения.

Замечание. Вопросительные знаки поставлены на схеме экспертом; мы в этом рисунке недочетов не видим.

Пример 2.

№ 18.

$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$21+2x-3x^2 \geq 0$

$-3x^2+2x+21 \geq 0$

Нули:

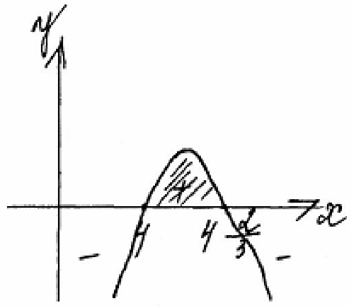
$-3x^2+2x+21=0$

$D = 4-4\cdot(-3)\cdot 21 = 256$

$x_1 = \frac{-2+26}{-6} = 4$

$x_2 = \frac{-2-26}{-6} =$

$= -\frac{28}{-6} = 4\frac{4}{6} = 4\frac{2}{3}$



$[4; 4\frac{2}{3}]$.

$3x-7\neq 0$

$3x \neq 7$

$x \neq 2\frac{1}{3}$.

За решение можно выставить 1 балл; учащийся, сделав вычислительную ошибку при нахождении корней квадратного трехчлена, дальше при решении квадратного неравенства действовал правильно. Далее он нашел значение переменной, при котором знаменатель обращается в нуль, однако эти два результата не соединены в один.

2. *Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена* $a_n = 5n+1$. *Найдите сумму членов арифметической прогрессии с пятнадцатого по пятьдесят пятый включительно.*

//Ответ: 7216.

//Решение.

Обозначим искомую сумму через S, тогда $S = S_{55} - S_{14}$.

Найдем S_{55} и S_{14}. Имеем: $a_1 = 6$, $a_{14} = 5 \cdot 14 + 1 = 71$, $a_{55} = 5 \cdot 55 + 1 = 276$;

$$S_{55} = \frac{(6+276)\cdot 55}{2} = 7755, \quad S_{14} = \frac{(6+71)\cdot 14}{2} = 539.$$

Таким образом, $S = 7755 - 539 = 7216$.

Другое возможное решение. Найдем сумму членов арифметической прогрессии, первый член которой равен a_{15}, а последний равен a_{55}. Имеем:

$a_{15} = 76$, $a_{55} = 276$, $n = 55 - 14 = 41$; $S = \dfrac{(76+276)\cdot 41}{2} = 7216$.

Замечание. При любом способе решения возможно использование другой формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Для этого учащиеся должны установить, что разность прогрессии равна 5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Правильно найден способ решения, получен верный ответ.
2	При правильном ходе решения и верном использовании формул допущена вычислительная ошибка, но с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно.
1	Ход решения правильный, но допущена ошибка в определении количества членов прогрессии n; решение при этом доведено до конца.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Ошибки в применении формул относятся к числу существенных, при их наличии выставляется 0 баллов.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

19)

$S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $a_1 = 15 \cdot 5 + 1 = 76$

$a_n = 55 \cdot 5 + 1 = 276$

$S = \dfrac{76+276}{2} \cdot 41 = \dfrac{\cancel{2}(38+138)}{\cancel{2}} \cdot 41$

$(38+138) \cdot 41 = 7216$

Ответ: 7216.

За решение можно выставить 3 балла: оно верное, ход рассуждений понятен. По-видимому, для этого учащегося задача является элементарной, и он опускает пояснение деталей, которые ему кажутся очевидными.

Пример 2.

А. п.

$a_n = 5n + 1$

$S_{15:55} = ?$

$a_{15} = 5 \cdot 15 + 1 = 76.$

$a_{55} = 5 \cdot 55 + 1 = 276.$

$S = \frac{(a_{15} + a_{55}) \cdot 40}{2} = \frac{(76 + 276) \cdot \cancel{40}\,20}{\cancel{2}} = 352 \cdot 20 = 7040.$

Ответ: 7040.

За решение выставляется 1 балл. Неправильно определено число суммируемых членов.

Задания 20 и 21

1. *Решите систему уравнений*: $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)((2y-1) = 0 \end{cases}$.

//Ответ: $(-5;-2)$, $(-5;1)$, $(-2{,}5; 0{,}5)$. Другие возможные формы записи ответа: $x_1 = -5,\ y_1 = -2$; $x_2 = -5,\ y_2 = 1$; $x_3 = -2{,}5,\ y_3 = 0{,}5$.

//Решение. На основании условия равенства произведения нулю получим:

$\begin{cases} x + 5 = 0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2y - 1 = 0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$.

Решим первую систему: $x = -5$; $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Получаем два решения системы уравнений $(-5; -2)$ и $(-5; 1)$.

Решив вторую систему, получим: $y = 0{,}5$; $x = -2{,}5$. Получаем еще одно решение системы уравнений: $(-2{,}5; 0{,}5)$.

Таким образом, система имеет три решения: $(-5;-2)$, $(-5;1)$, $(-2{,}5; 0{,}5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Правильно выполнен переход от данной системы к равносильной ей дизъюнкции (совокупности) двух систем, все дальнейшие шаги выполнены верно, получен верный ответ.
3	Ход решения правильный, решение доведено до конца, найденные значения переменных правильно объединены в пары, но: или допущена одна непринципиальная вычислительная ошибка (например, при нахождении корней квадратного уравнения) или описка, с ее учетом все дальнейшие шаги выполнены верно; или допущены погрешности логического характера в употреблении символики (если она применяется).

2	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущены два из указанных выше недочета.
1	Ход решения правильный, решение доведено до конца, но допущены ошибки при объединении найденных значений переменных в пары.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Неверное объединение найденных значений переменных в пары считается существенным недостатком и при его наличии не может быть выставлено более одного балла; если этот недостаток сопровождается каким-либо еще, то решение не засчитывается.

Если имеется более двух вычислительных ошибок или решение не доведено до конца, то оно не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

№ 20.

$$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)(2y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} x+5=0 \\ 2y-1=0 \end{cases}\right.$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{1}{2} = 0,5 \end{cases}$$

1) $x = -5$

$2y^2 - 5 + 2y = -1$

$2y^2 + 2y - 4 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 4 + 32 = 36$

$\sqrt{D} = 6$

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{4}$ $\quad y_1 = 2$ $\quad y_2 = -1$

$(-5; 2)$; $(-5; -1)$.

2) $y = 0,5$

$2 \cdot 0,25 + x + 2 \cdot 0,5 = -1$

$0,5 + x + 1 = -1$

$1,5 + 1 = -x$

$x = -2,5$

$(-2,5; 0,5)$

Ответ: $(-5; 2)$; $(-5; -1)$; $(-2,5; 0,5)$.

За решение выставляется 3 балла; допущены ошибки в употреблении символики.

Пример 2.

№20.

$$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)\cdot(2y-1) = 0 \end{cases}$$

$x = -1 - 2y - 2y^2$

$(5 - 1 - 2y - 2y^2)(2y - 1) = 0$

$(4 - 2y^2 - 2y)(2y - 1) = 0$

$4 - 2y^2 - 2y = 0$	$2y - 1 = 0$
$-2y^2 - 2y + 4 = 0 \,/ : -2$	$2y = 1$
$y^2 + y - 2 = 0$	$y_3 = \frac{1}{2}$
$y_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$	$x_3 = -1 - 1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$
$y_{12} = \frac{-1 \pm 3}{2}$	
$y_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$	
$y_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$	
$x_1 = -1 - 2 - 2 = -5$	
$x_2 = -1 + 4 - 8 = -5$	

Проверка:

$(-5; 1)$	$(-5; -2)$	$(-2{,}5; 0{,}5)$ – не подходит
$2 - 5 + 2 = -1$	$8 - 5 - 4 = -1$	$3{,}5 - 2{,}5 + 3 \neq -1$
$(-5+5)(2-1) = 0$	$(-5+5)(-4-1) = 0$	$(-2{,}5+5)(3-1) \neq 0$

Ответ: $(-5; 1); (-5; -2)$.

За решение можно выставить 3 балла: ход решения правильный, и, по сути, верный ответ получен. Но решение содержит логическую ошибку: выполнив проверку (которая в данном случае не является составной частью решения и может служить только цели самоконтроля), учащийся допустил вычислительную ошибку и сделал неправильный вывод о наличии постороннего решения, которого в принципе в данной ситуации быть не может.

Замечание. За нерациональное решение баллы не снимаются. Хотя хотелось бы, чтобы для сильного учащегося наличие уравнения $(x+5)(2y=1)=0$ сразу же служило сигналом к попытке применить условие равенства нулю произведения. Приведенное решение показывает (и это не единичный случай), что не наработаны некоторые стандартные приемы, обязательные для подготовки сильного ученика.

Пример 3.

20. $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)(2y-1) = 0 \end{cases}$

$2xy - x + 10y - 5 = 0$

$10y + 2xy = x + 5$

$2y(5+2x) = x+5$

$2y = \frac{(x+5)}{2(x+5)}$

$y = \frac{1}{2}$

$2 \cdot \frac{1}{4} + x + 1 + 1 = 0$

$\frac{2}{4} + x + 2 = 0$

$\frac{1}{2} + x + 2 = 0$

$x + \frac{1}{2} + \frac{2}{1} = 0$

$x + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = 0$

$x + \frac{5}{2} = 0$

$x = -\frac{5}{2}$

$x = -2,5$

$\begin{cases} x = -2,5 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ответ: $x = -2,5$; $y = \frac{1}{2}$;

За решение выставляется 0 баллов; оно подходит под графу «Другие случаи, не соответствующие указанным критериям». При перепроверке работ были обнаружены случаи, когда такого рода решение оценивалось 1 баллом. Это, однако, противоречит общим подходам к начислению баллов: задание может быть оценено положительным баллом только тогда, когда можно сделать вывод, что ученику понятна идея решения. Здесь учащийся не видит способа решения и, кроме того, делает грубые ошибки в преобразованиях.

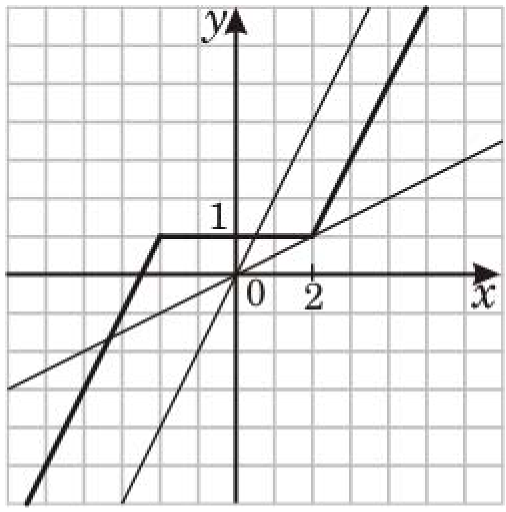
2. *Найдите все значения k, при которых прямая y = kx пересекает в трех точках ломаную, заданную условиями*:

$$y = \begin{cases} 2x+5, \text{ если } x < -2 \\ 1, \text{ если } -2 \le x \le 2 \\ 2x-3, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

//<u>Ответ</u>: $\frac{1}{2} < k < 2$. Другие возможные формы ответа: $k \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ или $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

//<u>Решение</u>.

Построим ломаную и проведем «граничные» прямые. Уравнение одной из них $y = \frac{1}{2}x$, другой $y = 2x$. Из рисунка видно, что в трех точках пересекают ломаную все прямые, проходящие через начало координат, находящиеся «между» этими двумя прямыми. Отсюда $\frac{1}{2} < k < 2$.



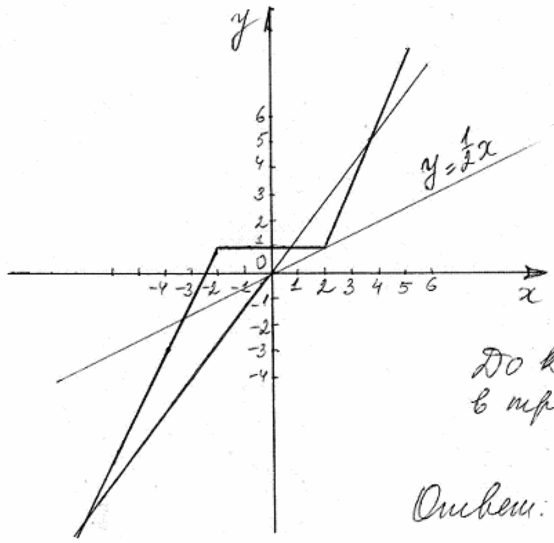
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Правильно построена ломаная, верно найдено множество значений коэффициента *k*.
3	Правильно построена ломаная, решение доведено до конца, но вместо строгого неравенства при записи множества значений *k* записано нестрогое неравенство.
2	Правильно построена ломаная, получено неравенство $k > \frac{1}{2}$, но верхняя граница значений *k* не указана.
1	Идея решения присутствует, но оно не доведено до конца: а именно, построена ломаная и проведены две граничные прямые, или какая-нибудь прямая, пересекающая ломаную в трех точках, дальнейшие шаги отсутствуют.
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.

Комментарий. Если график построен неправильно, или график построен правильно, но дальнейшие шаги отсутствуют, то решение не засчитывается.

Примеры выполнения заданий учащимися

Пример 1.

21. $y = \begin{cases} 2x+5, & \text{если } x<-2 \\ 1, & \text{если } -2 \le x \le 2 \\ 2x-3, & \text{если } x>1. \end{cases}$



$y=kx$

$(2;1)$

$2=k\cdot 1$

$k=\frac{1}{2}$

До $k=2$ пересекает в трех точках

Ответ: $\frac{1}{2}<k<2$

За решение выставляется 4 балла.

Пример 2.

$y = kx$

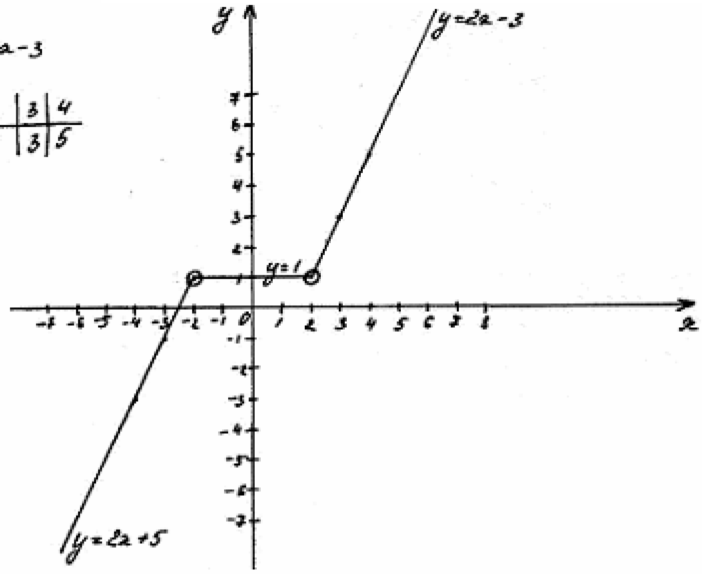
$$y = \begin{cases} 2x+5, \text{ если } x < -2 \\ 1, \text{ если } -2 \le x \le 2 \\ 2x-3, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

$y = 2x + 5$

x	-2	-2	-3	-4
y	1	1	-1	-3

$y = 2x - 3$

x	2	2	3	4
y	1	1	3	5



Чтобы прямая $y=kx$ пересекала этот график функции в трех различных точках она должна быть возрастающей ↑ и k должно быть больше 0,5.

Ответ: $k > 0,5$.

Решение можно оценить 2 баллами: правильно построена ломаная, найдена одна граница (хотя есть языковая погрешность).

3. Материалы для самостоятельной работы экспертов по проверке и оценке выполнения заданий с развернутым ответом [1]

Задание 17.

Сократите дробь $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

<u>Пример 1.</u>

17) $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \dfrac{\cancel{5}(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{\cancel{5}x\cancel{(x+0,4)}} = \dfrac{x-1}{x}$.

$5x^2-3x-2=0;$

$D=9+40=49;$

$x=\dfrac{3\pm 7}{10};\quad x_1=1;\ x_2=-0,4$

<u>Пример 2</u>.

17. $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x} = \dfrac{(x-1)(x+0,4)}{x(5x+2)} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{5x\cancel{(x+0,4)}} =$

$= \dfrac{x-1}{5x},\ x\neq -0,4$

[1] При проверке эксперты используют подходы, описанные в модели 1 или 2, в зависимости от того, какая модель оценивания принята в регионе.

Задания 18, 19

1. *Найдите область определения выражения*: $\dfrac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$.

<u>Пример 3</u>.

18. $\dfrac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$

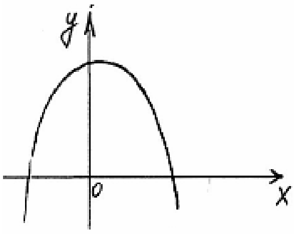
1) $\begin{cases} 21+2x-3x^2 \geq 0, \\ 3x-7 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} -3x^2+2x+21 \geq 0, \\ x \neq 2\frac{1}{3}. \end{cases}$

2) Рассм. ф-цию $y=-3x^2+2x+21$.

Функция квадратичная, ветви параболы направлены вниз.

Изобразим графически.



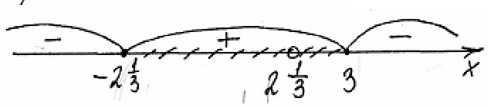
3) Найдем корни, для этого вычислим D.

$D = 4-4\cdot(-3)\cdot 21 = 4+12\cdot 21 = 4+252 = 256 = 16^2$

$x_1 = \dfrac{-2+16}{-6} = \dfrac{14}{-6} = -\dfrac{7}{3} = -2\dfrac{1}{3}$

$x_2 = \dfrac{-2-16}{-6} = \dfrac{-18}{-6} = 3$

4) $-3\left(x+2\frac{1}{3}\right)(x-3) \geq 0$



$x \in \left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(2\frac{1}{3}; 3\right]$

Ответ: $x \in \left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(2\frac{1}{3}; 3\right]$.

Пример 4.

№ 18

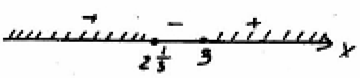
$$\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$$

$$\begin{cases} 21+2x-3x^2 \geq 0 \\ 3x-7 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(3x-7) \geq 0 \\ 3x-7 \neq 0 \end{cases}$$

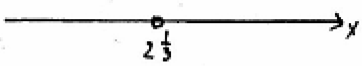
Решаем каждое из неравенств методом интервалов.

1. $(x-3)(3x-7) \geq 0$



2. $3x-7 \neq 0$

$x \neq 2\frac{1}{3}$



3.

$$-3x^2+2x+21=0$$

$$3x^2-2x-21=0$$

$$D = 4+4\cdot 3\cdot 21 = 256$$

$$\sqrt{D} = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 16}{6}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2\frac{1}{3}$$

$$3x^2-2x-21 = (x-3)(3x-7)$$

$x \in \left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$

Ответ: $\left(-\infty; 2\frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$

2. *Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 120, которые не делятся на 4.* (Отв.: 5400).

Пример 5.

№19

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$120 = 4 + 4(n-1)$

$n - 1 = 15$

$n = 16$

$S = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$S_1 = \dfrac{8 + 4(16-1)}{2} \cdot 16 = 940$

$S_2 = \dfrac{1 + 1(120-1)}{2} \cdot 120 = 7140$

$S_n = S_2 - S_1 = 7140 - 940 = 6200$

Ответ: $S = 6200$.

Задания 20, 21

1. *Решите систему уравнений*: $\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)((2y-1) = 0 \end{cases}$.

Пример 6.

№20

$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1; \\ (x+5)(2y-1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y^2 - 2y - 1 \\ (-2y^2 - 2y + 4)(2y-1) = 0 \end{cases}$

$(-2y^2 - 2y + 4)(2y-1) = 0$

$-2y^2 - 2y + 4 = 0 \;/ : (-2)$

$y^2 + y - 2 = 0 \qquad x = -2y^2 - 2y - 1$

$y_1 = -2 \qquad x_1 = -2 \cdot (-2)^2 - 2(-2) - 1 = -5$

$y_2 = 1 \qquad x_2 = -2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = -5$

$2y - 1 = 0 \qquad x_3 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2} - 1 =$

$2y = 1$

$y_3 = \frac{1}{2} \qquad = -2\frac{1}{2}.$

Ответ: $(-5; -2); (-5; 1); \left(-2\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 7.

№ 20

$$\begin{cases} 2y^2 + x + 2y = -1 \\ (x+5)(2y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5=0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ 2y^2 - 5 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ 2y^2 + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$y^2 + y - 2 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$

$\sqrt{D} = 3$

$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$y_1 = -2 \quad y_2 = 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases} \\ \cancel{x=4} \\ \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2y-1=0 \\ 2y^2 + x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + x + 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = -2\frac{1}{2} \end{cases}$$

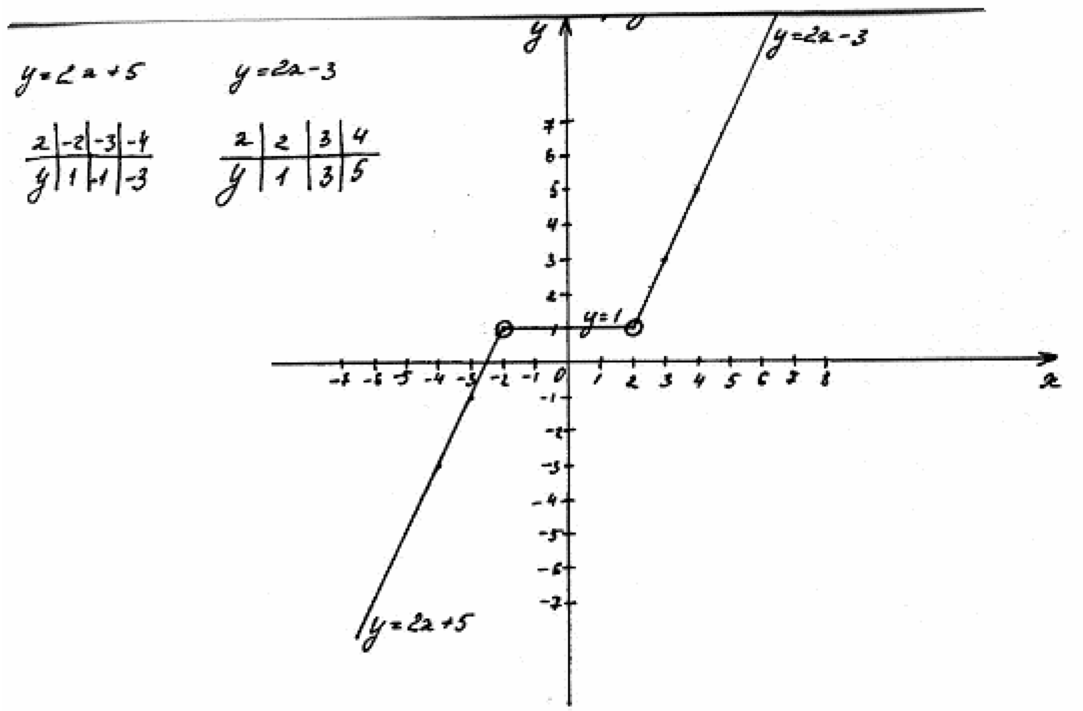
$$\begin{cases} y = 0{,}5 \\ x = -2{,}5 \end{cases}$$

Ответ: $(-5; -2)$; $(-5; 1)$; $(-2{,}5; 0{,}5)$

2. *Найдите все значения k, при которых прямая y = kx пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условиями*:

$$y = \begin{cases} 2x + 5, \text{ если } x < -2 \\ 1, \text{ если } -2 \le x \le 2 \\ 2x - 3, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Пример 8.



4. Рекомендуемая оценка решений учащихся

Модель 1: Рекомендуемая оценка решений учащихся

Пример 1. За решение выставляется 2 балла. Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.
Пример 2. Ошибка в разложении квадратного трехчлена на множители, 0 баллов.
Пример 3. Ошибка в символической записи ответа; решение можно оценить 3 баллами.
Пример 4. Допущена ошибка в алгоритме решения квадратного неравенства и вычислительная ошибка при вычислении корней квадратного трехчлена. За решение выставляется 0 баллов (видно, что учащийся что-то знает, но нет твердого владения базовыми алгоритмами).
Пример 5. Решение содержит вычислительные ошибки и ошибку при подстановке значений в формулу суммы (во втором случае); за решение выставляется 0 баллов.
Пример 6. Решение оценивается 6 баллами. За нерациональное решение баллы не снимаются.
Пример 7. Допущена погрешность в употреблении символики. Решение оценивается 5 баллами.
Пример 8. За решение выставляется 0 баллов: соответствующий случай описан в комментарии к критериям.

Модель 2. Рекомендуемая оценка решений учащихся

Пример 1. За решение выставляется 2 балла. Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.
Пример 2. Ошибка в разложении квадратного трехчлена на множители, 0 баллов.
Пример 3. Ошибка в символической записи ответа; решение можно оценить 2 баллами.
Пример 4. Допущена ошибка в алгоритме решения квадратного неравенства и вычислительная ошибка при вычислении корней квадратного трехчлена. За решение выставляется 0 баллов (видно, что учащийся что-то знает, но нет твердого владения базовыми алгоритмами).
Пример 5. Решение содержит вычислительные ошибки и ошибку при подстановке значений в формулу суммы (во втором случае); за решение выставляется 0 баллов.
Пример 6. Решение оценивается 4 баллами. За нерациональное решение баллы не снимаются.
Пример 7. Допущена погрешность в употреблении символики. Решение оценивается 3 баллами.
Пример 8. За решение выставляется 0 баллов: соответствующий случай описан в комментарии к критериям.

5. Памятка для экспертов

При проверке и оценке экзаменационных работ эксперту необходимо обращать внимание на соблюдение определенных правил и технологии проверки выполнения заданий с развернутым ответом.

1. Проверка экзаменационных работ учащихся по предмету осуществляется на основе системы оценивания, разработанной Федеральной предметной комиссией.

2. При работе эксперта по проверке и оценке экзаменационных работ необходимо обращать внимание на соблюдение определенной технологии проверки работ. Проверка осуществляется следующим образом: сначала в имеющейся у него пачке работ эксперт проверяет все задания 17, затем 18, 19, 20, 21. Это позволяет существенно повысить качество экспертной оценки и оптимально использовать время проверки.

3. Отдельные элементы технологии, например, назначение третьего эксперта, а также форма бланков-протоколов проверки определяются на региональном уровне.

На региональном уровне определяется, каким символом в протоколе проверки отмечаются задания, которые были не выполнены экзаменуемым, не зависимо от того, пропустил ли участник экзамена задание или не успел его выполнить. Данная информация важна для определения качества заданий. По технологии ЕГЭ отсутствие ответа на задание отмечается символом «N». Наличие на месте ответа непонятных записей, знаков, рисунков или пометок может быть расценено как ответ на задание или подтверждение того, что экзаменуемый приступал к выполнению задания или имел возможность его выполнить, но не выполнил по какой-то причине. В этом случае выставляется 0 баллов.

4. Экспертам необходимо обратить внимание на наличие в системах оценивания указаний о возможности иного верного решения, ответа и т.д., который должен оцениваться, как и те, что повторяют логику решения, приводимого в критериях оценивания заданий КИМ. При наличии в работах учащихся решений,

отличных от предложенных в рекомендациях, критерии вырабатываются предметной комиссией с учетом описанных общих подходов. Решения учащихся могут содержать недочеты, не отраженные в критериях, но которые, тем не менее, позволяют оценить результат выполнения задания положительно. В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочет, принимает предметная комиссия.

5. При проверке и оценке экзаменационных работ не учитываются особенности почерка и наличие грамматических ошибок в работах учащихся (кроме работы по русскому языку), если они не искажают сути ответа.

6. Если ответ ученика содержит значительно больше информации, чем требуется по заданию, или ответ является частично «правильным», но содержит дополнительные элементы, то необходимо придерживаться следующих правил:

- прежде всего, следует установить, противоречат ли элементы ответа друг другу;

- если элементы противоречат друг другу (один правильный, а другой – неправильный), то выставляется 0 баллов;

- если элементы ответа не противоречат друг другу, то наличие дополнительного элемента не учитывается при оценке ответа.